

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL

PROGRAMA DEL DIPLOMA

MONOGRAFÍA EN FÍSICA

La relación entre viscosidad y movimiento armónico amortiguado

Pregunta de investigación: ¿De qué forma influye la viscosidad de un fluido

en el tiempo de duración del movimiento amortiguado?

Número de palabras: ____3990____

Esta Monografía debe referenciarse de la siguiente manera:

Carita, C. (2019). *La relación entre viscosidad y movimiento armónico amortiguado*
[Trabajo de investigación. Monografía, Centro Educativo Particular San Agustín] Perú.

ÍNDICE

Introducción.....	3
Marco teórico.....	4
Plan y diseño del experimento.....	16
Resultados obtenidos.....	19
Procesamiento de datos.....	19
Presentación de datos. Análisis.....	27
Conclusiones.....	30
Referencias.....	31
Anexos.....	32

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tuvo como motivación una situación personal que viví el año pasado, cuando iba en el carro con mi familia ocurrió una falla mecánica en los amortiguadores que causo un desbalance en el vehículo, en el taller mecánico nos dijeron que se trataba de una fuga de líquido hidráulico en la suspensión. Ciertos vehículos cuentan con un sistema de suspensión hidráulica para absorber las irregularidades del terreno. Es así como encontré la relación que tenía este hecho real con el movimiento armónico amortiguado. El cual se caracteriza principalmente por que la amplitud de la oscilación decrece exponencialmente con el tiempo. Asimismo, describe un movimiento que está presente en toda la naturaleza y se debe principalmente a las fuerzas de fricción dinámica, las cuales decidí representar en mi experimento como líquidos caseros. En consecuencia, decidí que la primera variable sería intervalo de tiempo en segundos (duración) en que el movimiento amortiguado llega a detenerse en su posición de equilibrio desde determinada amplitud. A continuación, decidí que mi segunda variable sería la viscosidad que se mide en términos de coeficiente de viscosidad (μ), y cuyas unidades son los $Pa \cdot s^{-1}$.

A partir de ese punto, me pregunte si era posible encontrar un líquido, que pudiera ser fácil de conseguir, que fuera capaz de reemplazar el sistema de vehicular convencional. Ello se lograría si existiese una relación entre la viscosidad y el tiempo de amortiguación que me permitiese decidirme por un líquido en especial que cumpla con esas características, para ello me planteo la siguiente pregunta que guiara mi investigación **¿De qué forma influye la viscosidad de un fluido en el tiempo de duración movimiento amortiguado?**

Para este propósito medimos la viscosidad del fluido no directamente; sino aplicando el método de Stokes dejando caer una esfera en un vaso precipitado que contenga los fluidos. Este experimento requiere las siguientes variables: densidad del fluido, la densidad de la esfera y la velocidad límite de la esfera al fluir en el seno del líquido. Los valores de viscosidad para cada líquido usado serán la variable independiente.

Para calcular el intervalo de tiempo del movimiento armónico amortiguado empleare un sistema sencillo de masa-resorte.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

1. Sistema de suspensión vehicular

Para el presente trabajo de investigación considero necesario partir de la teoría acerca del funcionamiento del sistema de suspensión vehicular. La información presentada de este tema tiene como referencia general al trabajo de investigación de Rubén Oliva (2011)¹.

Es importante conocer que el sistema de suspensión vehicular tiene la tarea de soportar el peso del vehículo, lo protege de las vibraciones excesivas y absorbe las irregularidades de la superficie transitada en pos de la seguridad de los ocupantes del vehículo.

1.1. Elementos de la suspensión

El sistema de suspensión consta de dos conjuntos de elementos principales que considero mencionar por su relación en la experimentación para hallar la variable de tiempo de amortiguación.

- a) El **conjunto elástico** que está conformado por los elementos que impiden que las oscilaciones provocadas por las irregularidades del terreno se transmitan a la masa suspendida. En esta investigación no se profundizará en estos elementos, se presentará únicamente como un resorte normal.
- b) Los **elementos amortiguadores** que son los que mitigan las oscilaciones de los elementos elásticos. Su tarea es disipar la energía producida por el movimiento oscilatorio haciendo que este decaiga exponencialmente. Los amortiguadores se clasifican según su fluido. Este trabajo usará un concepto simplificado de los amortiguadores hidráulicos.

¹Oliva Domínguez, R. D. (2011). "Simulación en modélica de elementos mecánicos de una suspensión" (Proyecto Fin de Carrera). Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España.

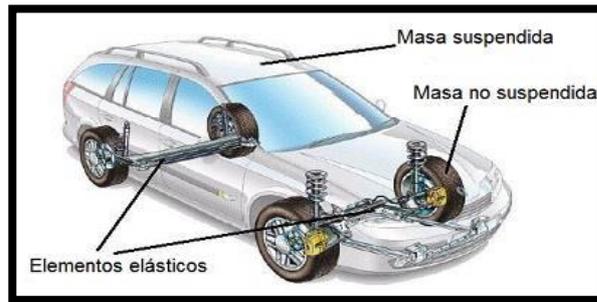
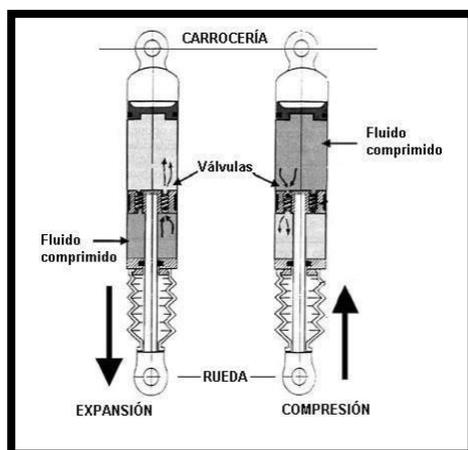


Figura 1²: Partes principales de un sistema de suspensión

1.2. Amortiguadores hidráulicos

El amortiguador es un mecanismo que se encarga de absorber energía, es vital para reducir o frenar los efectos de compresión y de extensión de los muelles del vehículo.

El funcionamiento de estos mecanismos convencionalmente está basado en la transformación de la energía cinética en energía térmica. El amortiguador cuenta con un cilindro hidráulico cerrado dentro del cual circula líquido hidráulico por orificios pequeños y válvulas de un pistón. El líquido hidráulico pasa de una cámara superior e inferior y viceversa según los movimientos de compresión y extensión.



Este sistema implica varias vibraciones externas por parte del vehículo al que se encuentra anclado; sin embargo, solo vamos a considerar la vibración relacionada al sistema resorte, masa y líquido hidráulico.

Figura 2³: Esquema de partes del mecanismo de amortiguación

²Emilio, L. (2018). Esquema básico de funcionamiento de un amortiguador hidráulico [Imagen]. Recuperado de <https://www.researchgate.net/figure>

³Oliva Domínguez, R. D. (2011). Elementos de la suspensión [Imagen]. Recuperado de <https://es.scribd.com>

2. Movimientos oscilatorios

Para estudiar el mecanismo de amortiguación es necesario realizar un experimento que se centre en las vibraciones del sistema ya mencionado. El estudio de los movimientos oscilatorios es un tema que pertenece a la dinámica. Según Medina (2009) “virtualmente todo objeto tiene la capacidad de vibrar y de maneras diferentes, los movimientos oscilatorios son vaivenes”. Asimismo, para lograr las oscilaciones se desplaza a un cuerpo de su posición de reposo y se suelta. “Una fuerza restauradora interviene y tira de ellas y mueve a la masa de su posición de equilibrio”. La fuerza restauradora es en este experimento es la que da lugar al equilibrio del sistema, es decir, que el sistema vuelva a su posición de equilibrio.

2.1 Movimiento armónico amortiguado

Todos los movimientos oscilatorios no ideales están sometidos a alguna fricción. Según Barco y Rojas (1996) “cuando un cuerpo oscila y sobre él existen fuerza de rozamiento, esto implica que la amplitud de la oscilación vaya disminuyendo gradualmente hasta que esta se haga cero, es allí donde se dice que la oscilación es amortiguada” (p.14). La experiencia también nos dice que el desplazamiento de un objeto oscilante es decreciente, como cuando viajamos en un vehículo con suspensión hidráulica.

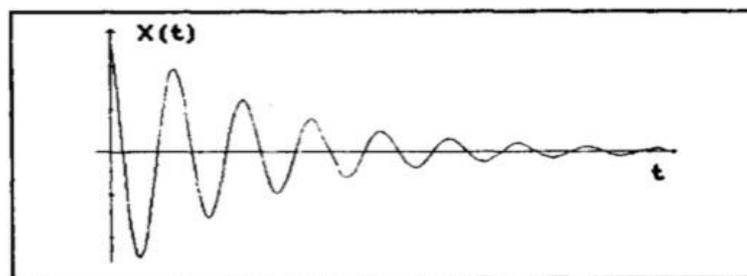


Figura 3⁴: La amplitud de la oscilación decrece de forma exponencial

⁴Barco, H., & Rojas, E. (1996). Gráfica de la oscilación amortiguada [Imagen]. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/9314/6/958-9322-24-7.pdf>

2.2 Modelo del experimento

Para extrapolar el sistema de amortiguación en este experimento, se va a realizar un sistema conformado por una pesa suspendida por un resorte anclado a un soporte universal y esta pesa se verá frenada por cada uno de los líquidos que se usaran en el experimento.

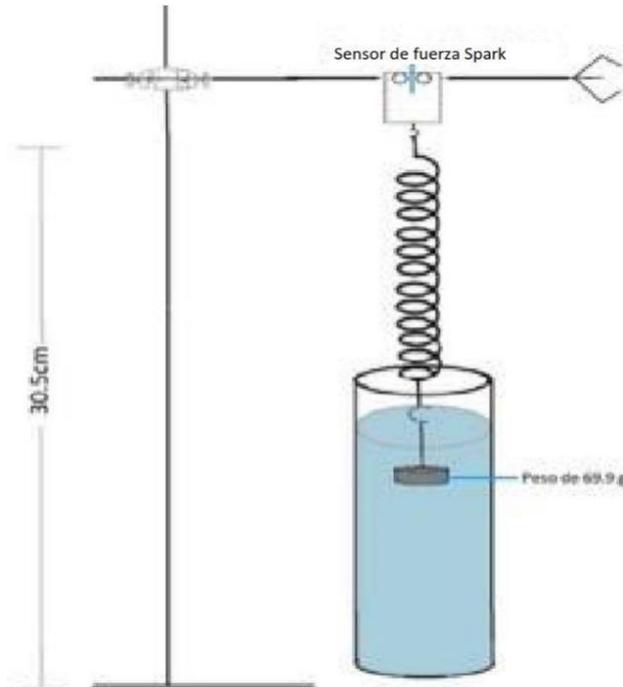


Figura 4: modelo del experimento para hallar la variable duración de la amortiguación

2.2.1 Diagrama de cuerpo libre sobre la masa

Para estudiar el sistema masa, resorte y líquido hidráulico se tiene que analizar todas las fuerzas implicadas para así determinar la aceleración y su comportamiento cinemático. Con este propósito se realiza un diagrama de cuerpo libre.

Observamos en el DCL de la masa que se usará en el experimento que las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza elástica, el peso y la fuerza producida por la viscosidad. Sabemos que esas fuerzas en módulo son:

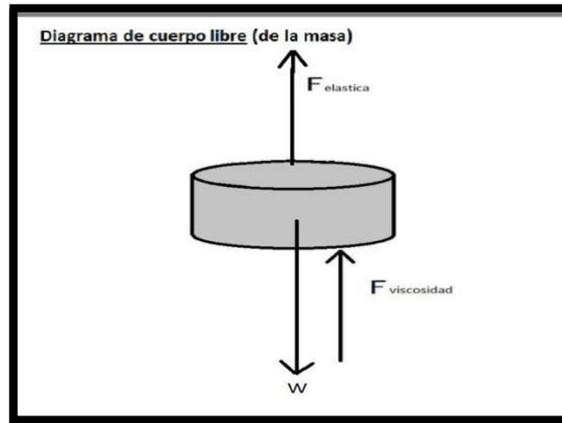


Figura 4: Diagrama del cuerpo libre de la masa usada en la experimentación

En el diagrama de cuerpo libre de la masa, de las tres fuerzas que observamos, la fuerza elástica y el peso son fuerzas conservativas (sabemos que no disipan energía); por tanto, la única fuerza disipadora vendría a ser la que se genera debido a la viscosidad⁵.

Entonces el tiempo en el que se disipa la energía cinética puede estar relacionado con la fuerza viscosa, que a su vez está relacionado con la viscosidad del fluido (ya que el coeficiente b está relacionado con la viscosidad).

2.3 Modelo matemático del movimiento armónico amortiguado

Según Tippens, P. (2007) por la ley de elasticidad de Hooke:

$$F_{\text{elástica}} = k * \Delta x$$

En donde k representa el coeficiente de elasticidad del resorte y Δx representa el estiramiento del resorte a partir de su longitud no estirada (cuando el resorte está en compresión Δx es negativo)⁶. Esta es la fuerza restauradora en el sistema masa resorte.

⁵ García, A. (s.f.). Fuerzas no conservativas. Recuperado 20 mayo, 2019, de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/dinamica/trabajo/energia/energia3.html

⁶Tippens, P. (2007). Movimiento armónico simple [PPT]. Recuperado 20 mayo, 2019, de https://es.slideshare.net/moises_galarza/movimiento-armonico-simple-14558032

Según Ulloa, M. (2013) la mayoría de fuerzas viscosas son proporcionales a la velocidad, por lo tanto:

$$F_{viscosidad} = -b * v$$

En donde **b** es la constante de amortiguamiento que está relacionada con el grado de viscosidad del fluido (propiedad intrínseca del fluido en que se encuentra la masa) y **v** es la velocidad de la masa. El símbolo menos indica que la fuerza de viscosidad siempre se opone a la dirección del movimiento del cuerpo oscilante.

Aplicando la segunda ley de Newton, la fuerza total que actúa sobre la masa es:

$$\Sigma F = m * a$$

$$W - F_{elastica} - F_{viscosidad} = m * a$$

$$m * g - k * \Delta x - b * v = m * a$$

$$0 = m * a + b * v + k * \Delta x - m * g$$

Ecuación que relaciona la aceleración, velocidad y posición de la masa y de la cual se puede a través de cálculos matemáticos llegar a la ley de movimiento de la masa en el líquido.

Sin embargo; en este presente experimento me interesa analizar el tiempo en el que culmina el movimiento amortiguado, el cual está relacionado con qué tan rápido se disipa la energía cinética de la masa, y por consecuencia cuando vuelve al reposo.

3. Relación de la amortiguación con la viscosidad

Dado que la fuerza de fricción por viscosidad está relacionada con la energía disipada entonces es de interés analizar la viscosidad generada por el fluido.

La fricción por viscosidad se genera por esta propiedad de cada fluido y puede ser hallada mediante métodos experimentales utilizando en este caso el método de Stokes.

3.1 Ley de Stokes

Cuando una esfera de determinado radio, cae a través de un fluido o líquido viscoso esta está sometida a las fuerzas de viscosidad y si el recipiente que contiene el fluido es cilíndrico entonces es posible aplicar la ley de Stokes.

La ley de Stokes propone la siguiente ecuación:

$$V_p = \frac{2g(\rho_e - \rho_f)R^2}{9\mu}$$

En donde:

- v_p es la velocidad terminal (velocidad máxima a la que llega el cuerpo partiendo del reposo).
- g es el módulo de la aceleración de la gravedad.
- ρ_e es la densidad de la esfera.
- ρ_f es la densidad del fluido.
- R es el radio de la esfera.
- μ es la viscosidad del fluido.

Despejando la viscosidad en la ecuación y midiendo las demás variables con la experimentación podemos hallar la viscosidad de un fluido específico. Según Sandoval, Caramy y Salinas (2010)⁷ “es de suma importancia conocer el valor constante que adquiere la velocidad de la esfera a partir de determinado

⁷ Sandoval, C., Caramy, J., & Salinas, J. (2010). La engañosa simplicidad del "método de Stokes" para medir viscosidades. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext

instante”, por lo que ellos plantean la siguiente ecuación para conocer el valor de la velocidad límite que se usara en la ecuación de la ley de Stokes:

$$V = V_{\text{límite}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Siendo V la velocidad de la esfera en un tiempo t determinado, $V_{\text{límite}}$ la velocidad máxima a la que llega la esfera en un fluido y el valor es una constante para cada ensayo. Cabe señalar que esta ecuación se halla a partir de que velocidad(v) = 0 en un tiempo(t)=0 en la ecuación.

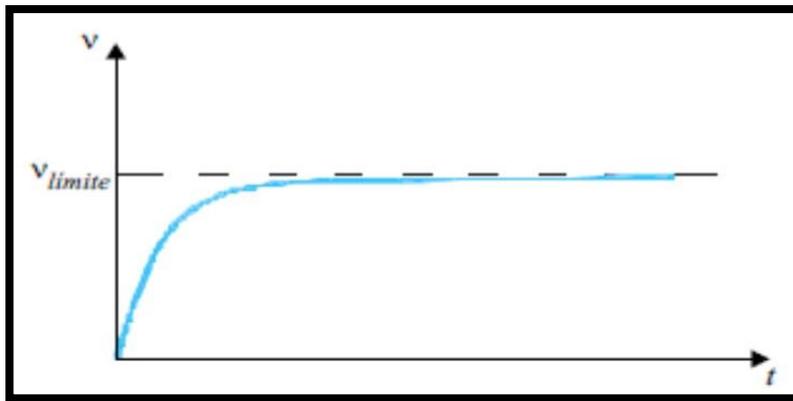


Figura 5⁸: Comportamiento de la velocidad cuando se impone que $v_0=0$

Líquidos utilizados en la experimentación

El líquido que se usa normalmente en los sistemas de suspensión hidráulica que deseo emular o reemplazar es el aceite hidráulico. Cada sistema opera con uno diferente, ello depende de factores como la exigencia y la presión. El líquido sustituto cumple con características como:

- a) Propiedad óptica de la transparencia, para que sea factible el cálculo de la viscosidad mediante el método de Stokes
- b) Ser un fluido newtoniano. La viscosidad de estos líquidos no variará a lo durante el experimento por la fuerza de la esfera al atravesar el líquido.

⁸Sandoval, C., Caramy, J., & Salinas, J. (2010, 18 febrero). Gráfica velocidad límite [Imagen]. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext

PLAN Y DISEÑO DEL EXPERIMENTO

La presente investigación abarca la siguiente pregunta:

¿De qué forma el intervalo de tiempo que dura un movimiento armónico amortiguado usando líquidos es influenciado por la viscosidad de los mismos?

Hipótesis:

El tiempo en que demora en detenerse el movimiento depende de manera inversamente proporcional a la viscosidad del fluido. Es decir, matemáticamente:

$$t * \mu = constante$$

Donde t es el tiempo de amortiguación y μ es la viscosidad.

MATERIALES

- 1. Para armar el sistema masa-resorte (movimiento armónico amortiguado):**
 - Soporte universal
 - Nuez doble
 - Pinza
 - Vaso de precipitado de 400ml
 - 1 resorte (longitud no deformada= 7.4cm / Constante k=25 N/m)
 - Pesa de metal con gancho 69.9g
 - Sensor de fuerza SPARK
 - Agua 500ml
 - Aceite de cocina 500ml
 - Leche evaporada 500ml
 - Agua con jabón 500ml
 - Jabón líquido 500ml
 - Glicerina 500ml

2. Para hallar el coeficiente de viscosidad (Método de Stokes):

- Cámara filmadora
- Probeta de 250ml
- Tubo transparente de 70cm de altura
- Balanza electrónica
- Agua 500ml
- 1 esfera de vidrio
- Cinta métrica
- Vernier
- Todos los líquidos de la parte 1 de materiales.

PROCEDIMIENTO Y METODOLOGÍA

Para hallar el coeficiente de **viscosidad** para cada líquido se usará el método de Stokes. Por ello empezare midiendo la masa de cada uno de los 7 líquidos en la balanza electrónica usando una probeta de 250ml. Este proceso se repitió 8 veces. Seguidamente se mide el diámetro de la esfera de vidrio con el vernier, así como su masa en gramos. Luego se vierte el líquido hasta llenar el recipiente cilíndrico, simultáneamente se sujeta la cinta métrica a la misma altura del tubo (70cm).

La esfera se lanza en el centro del tubo, se debe evitar que este toque las paredes del tubo y que tenga una velocidad inicial alta. Naturalmente se espera que la esfera alcance, al cabo de un tiempo, una velocidad límite o máxima. Se realiza este procedimiento 4 veces por cada líquido que llamaremos ensayos.

La cámara filmadora está dirigida a seguir a la esfera a lo largo del tubo transparente con un acercamiento que logre observar con claridad las escalas de la cinta métrica adherida al tubo. Tomaremos intervalos de tiempo como datos.

Los videos fueron procesados por el programa de edición de videos Vegas PRO 15. Se filmaron un total de 28 veces y se escogieron tomas en contraste con la escala de la cinta métrica para cada una de las filmaciones. La cámara filmadora mostró el tiempo con una estimación de 0.01s.

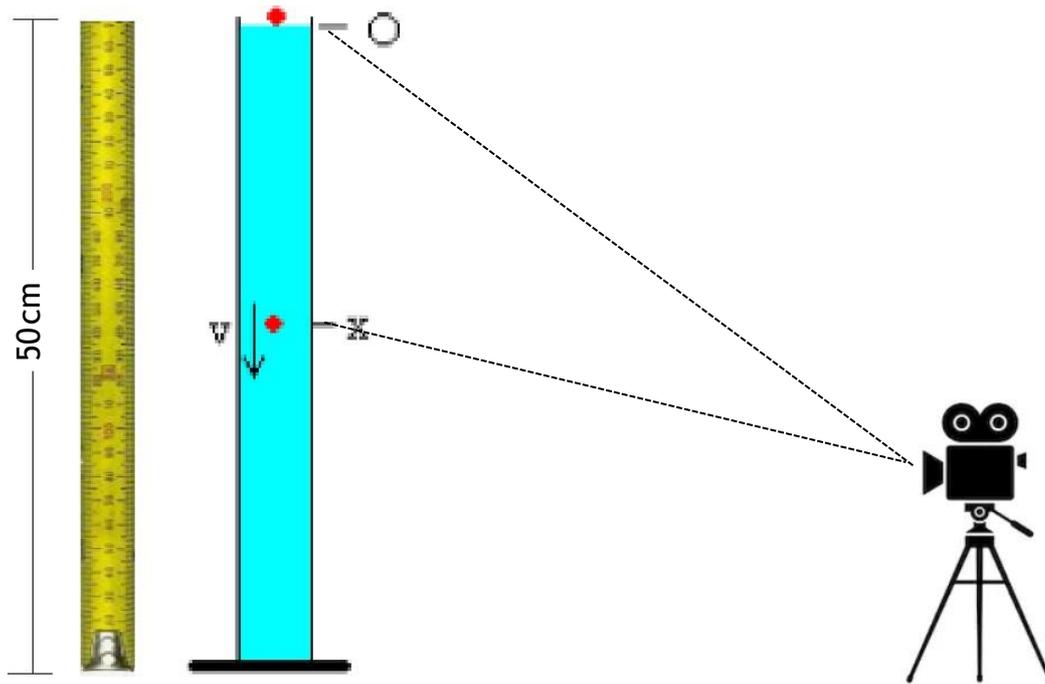


Imagen 6: Bosquejo del experimento para hallar el coeficiente de viscosidad. Para la esfera lanzada en la posición O, hay una velocidad exponencial hasta llegar a la posición X.

Para hallar el **tiempo de amortiguación** por cada líquido se procedió de la siguiente manera. En primer lugar, se midió la masa, que consistía en una pesa de metal y un gancho, en la balanza electrónica que en total pesaban 69.9 gramos. Luego se armó el soporte universal con la nuez y la pinza a una altura de 30.5 cm de la superficie plana.

El sensor de fuerza cuelga de la pinza perpendicularmente al soporte universal. El resorte a su vez este sujeto al sensor de fuerza. Y a la vez la masa con el gancho cuelga del resorte. Se sujeta la cinta métrica verticalmente al sistema desde la superficie hasta la altura del sensor con el fin de marcar en la escala de la cinta métrica una misma posición de equilibrio.

Al sistema se le unió el vaso de precipitado con 400ml de cada líquido, dentro del cual, en el centro exactamente, se ubicaba manualmente la masa unida al resorte. Asimismo, se alzó la masa al ras del agua (a una distancia de $11.2\text{cm} \pm 0.05\text{cm}$

de la superficie) para todos los líquidos, acción que comprime el resorte. A continuación, se inicia el sensor de fuerza en modo gráfica Fuerza(N) vs tiempo(s) al tiempo que se suelta la masa.

Esperamos a que la masa dentro del líquido detenga su movimiento solo vertical y que por lo tanto la gráfica oscilante en el sensor haya alcanzado la posición de equilibrio. Repetimos este proceso 8 veces por cada uno de los 7 líquidos.

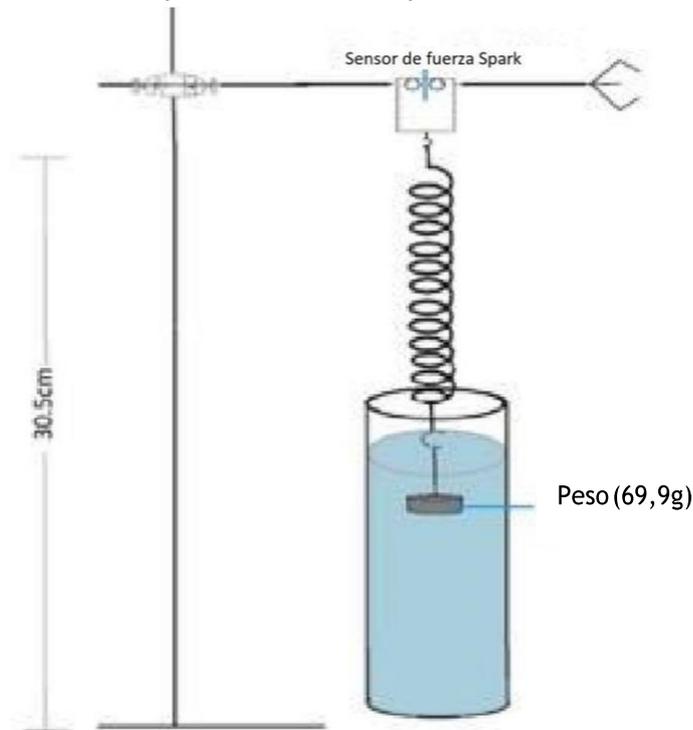


Imagen 7: Bosquejo del sistema masa-resorte con el recipiente, con la masa y el líquido como medio amortiguador

CAPÍTULO II

RESULTADOS OBTENIDOS

DATOS DIRECTOS

Tabla 1: Masa “m” en gramos según liquido en un volumen general de 250ml

Líquidos	Masa m/g							
	$\Delta m = \pm 0.01 \text{ g}$							
Aceite de cocina	226.30	226.05	226.32	226.52	226.38	226.11	226.48	226.61
Agua con jabón	235.82	234.64	235.35	235.29	234.74	234.43	235.27	235.30
Agua	249.65	249.91	249.72	249.54	249.93	249.82	249.67	249.99
Leche normal	261.52	261.67	261.59	261.95	261.31	261.33	261.44	261.71
Aceite de oliva	232.38	231.71	231.25	230.60	231.35	230.93	231.63	231.89
Glicerina	312.72	312.75	313.58	313.17	312.38	313.20	313.37	313.39
Jabón liquido	289.25	289.13	289.64	289.05	288.81	289.28	288.89	288.68

Se efectuaron 8 mediciones de masa por cada liquido usado, debido a que la variable viscosidad depende de esta magnitud. Mientras más veces midamos la masa podremos reducir el error aleatorio y obtener un valor preciso y exacto. Asignamos a todas las masas la incertidumbre del dispositivo de medición $\pm 0.01 \text{ g}$.

Tabla 2: Tiempo de amortiguación del sistema masa-resorte según líquido en segundos. Se usó 400ml de cada líquido en un vaso de precipitado.

Líquidos	Tiempo de amortiguación t/s							
	$\Delta t = \pm 0.01 \text{ s}$							
Aceite de cocina	7.68	7.77	7.57	7.65	7.79	7.42	7.43	7.71
Agua con jabón	33.77	33.38	33.62	33.84	33.24	33.73	33.46	33.18
Agua	39.16	38.99	39.43	39.35	39.37	38.83	38.97	39.52
Leche evaporada	5.74	5.62	6.04	5.61	5.91	5.51	6.12	5.57
Aceite de oliva	5.37	5.45	4.88	5.37	5.4	6.05	5.7	5.16
Jabón líquido	4.19	4.12	3.53	4.07	5.04	3.65	3.87	4.77
Glicerina	1.35	2.14	1.64	1.6	1.28	0.97	1.26	1.45

Para la medición del tiempo de amortiguación se usó el sensor de fuerza, pero se tomó el dato de tiempo en la gráfica, por lo tanto, asignamos al conjunto la incertidumbre del dispositivo en la medición de tiempo que es $\pm 0.01 \text{ s}$.

Tabla 3: Intervalo de tiempo en segundos(s), distancia recorrida de la esfera en cm durante un tiempo en s por cada fluido.

Líquidos	Tiempos representativos (s) $\pm 0.01s$	$\Delta t/s \pm 0.01s$	$\Delta d/cm \pm 0.1cm$
Aceite de cocina	0.08	0.16	11.2
	0.24	0.16	20.0
Agua con jabón	0.05	0.10	7.0
	0.15	0.10	20.6
Agua	0.80	0.16	27.7
	0.24	0.16	79.0
Leche evaporada	0.08	0.16	6.6
	0.24	0.16	10.1
Aceite de oliva	0.16	0.32	4.8
	0.48	0.32	11.8
Glicerina	1.50	3.00	2.5
	4.50	3.00	4.0
Jabón líquido	0.70	1.40	6.5
	2.10	1.40	15.1

Estos datos se obtuvieron directamente de los videos que se tomaron en el experimento del método de Stokes para hallar el coeficiente de viscosidad.

DATOS PROCESADOS

EXPERIMENTO 1. Variable coeficiente de viscosidad

1) Datos procesados de radio y densidad de la esfera

Al medir el diámetro de la esfera se obtuvo $1.66 \pm 0.005 \text{ cm}$, por lo que su radio (la mitad) es de $0.830 \pm 0.003 \text{ cm}$. Convirtiendo la medida a metros, el radio es $0.00830 \pm 0.00003 \text{ m}$.

Al medir la masa de la esfera se obtuvo $3.39 \pm 0.01 \text{ g}$, por lo que la masa expresada en kilogramos es de $0.00339 \pm 0.00001 \text{ kg}$. El volumen se calculo mediante la formula del volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

$$\text{Volumen (V)} = 0.0000024 \text{ m}^3$$

La incertidumbre relativa del volumen (ΔrV) esta relacionada con la incertidumbre relativa del radio (ΔrR) de la siguiente forma:

$$\Delta rV = 3(\Delta rR)$$

$$\Delta rV = 3\left(\frac{\Delta R}{\text{radio}}\right)$$

$$\Delta rV = 3\left(\frac{0.00003}{0.00830}\right)$$

$$\Delta rV = 0.01$$

Para la incertidumbre relativa de la masa de la esfera:

$$\Delta rm = \frac{0.00001}{0.00339}$$

$$\Delta rm = 0.0029$$

El valor de la densidad de la esfera (ρC) es:

$$\rho C = \frac{\text{masa de la esfera (kg)}}{\text{volumen de la esfera (m}^3\text{)}}$$

$$\rho C = 1415 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Entonces la incertidumbre relativa de la densidad ($\Delta r\rho C$) estaría dada por:

$$\Delta r\rho C = \Delta rV + \Delta rm$$

$$\Delta r\rho C = 0.01 + 0.0029$$

$$\Delta r\rho C = 0.0129$$

Finalmente, la incertidumbre absoluta de la densidad ($\Delta\rho C$) es:

$$\Delta\rho C = 0.0129 * 1415$$

$$\Delta\rho C = \pm 18 \text{ kg. m}^{-3}$$

Tabla 4: Datos del radio, masa y densidad de la esfera con sus incertidumbres respectivas.

Radio R/m $\Delta R = \pm 0.00003 \text{ m}$	Masa m/kg $\Delta m = \pm 0.00001 \text{ kg}$	Densidad $\rho C/\text{kg.m}^{-3}$ $\Delta\rho C = \pm 18 \text{ kg.m}^{-3}$
0.0083	0.00339	1415

1) Datos procesados de la velocidad límite de la esfera en el líquido

La velocidad límite de cada uno de los líquidos se hallaron mediante la siguiente ecuación:

$$V = V\text{límite} * (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Por ejemplo, para el líquido “aceite de cocina” con los datos directos de la experimentación:

$$t_{\text{representativo}1} = 0.08, \quad V1 = \frac{\Delta d}{\Delta t} = 70.0 \text{ cm. s}^{-1}$$

$$t_{\text{representativo}2} = 0.24, \quad V1 = \frac{\Delta d}{\Delta t} = 125.0 \text{ cm. s}^{-1}$$

Reemplazando en la ecuación los datos, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$70 = V\text{límite} * (1 - e^{0.08/\tau})$$

$$125 = V\text{límite} * (1 - e^{0.24/\tau})$$

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{70}{125} = \frac{(1 - e^{\frac{0.08}{\tau}})}{(1 - e^{\frac{0.24}{\tau}})}$$

Resolviendo esta ecuación con una calculadora o programa, escogemos el resultado negativo de τ :

$$\tau = -0.12 \text{ s}$$

Reemplazando este resultado en una de las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$70 = V_{\text{límite}} * (1 - e^{\frac{0.08}{-0.12}})$$

Se halla la velocidad límite despejando:

$$V_{\text{límite}} = 143.9 \text{ cm. s}^{-1} = 1.439 \text{ m. s}^{-1}$$

Reemplazando los datos es posible realizar un gráfico de velocidad con respecto al tiempo, mediante la siguiente función:

$$V = 1.46 * (1 - e^{\frac{t}{-0.12}}) \text{ en m. s}^{-1}, \text{ (tiempo en segundos).}$$

Tabla 5: Datos para calcular la velocidad límite. La velocidad promedio y Constante τ según cada líquido.

Líquidos	Velocidad promedio $V_p/m. s^{-1}$	Constante Tau (τ)	Velocidad límite $V_l/m. s^{-1}$
Aceite de cocina	70.0	-0.12	1.46
	125.0		
Agua con jabón	70.0	-2.58	36.51
	206.0		
Agua	173.1	-2.07	45.64
	493.8		
Leche evaporada	41.3	-0.08	0.67
	66.3		
Aceite de oliva	15	-0.75	0.78
	36.9		
Glicerina	0.8	-1.74	0.014
	1.3		
Jabón líquido	4.6	-2.50	0.189
	10.9		

Grafica 1: La línea azul representa la velocidad de la esfera en el aceite de cocina para un tiempo dado. La línea roja representa la velocidad límite de la esfera. Las gráficas por cada líquido se encuentran en anexos.



❖ Los gráficos de velocidad de todos los líquidos se encuentran en anexos.

El proceso se repitió 4 veces para hallar un promedio de velocidad límite por cada fluido.

Hallamos las incertidumbres promedio con la siguiente fórmula:

$$\Delta V_{\text{límite}}(\text{medio}) = \frac{\text{rango}}{2} = \frac{\text{maximo} - \text{minimo}}{2}$$

Hallamos las velocidades promedio con la siguiente fórmula:

$$V_{\text{límite}}\text{promedio} = \sum_{V_i=V_1}^{V_n} V_i/n$$

Propagación del error de las velocidades límite (escogemos la incertidumbre del agua con jabón):

$$\Delta V_{\text{límite}}(\text{agua con jabon}) = \frac{36.57 - 36.45}{2}$$

$$\Delta V_{\text{límite}}(\text{agua con jabon}) = 0.06 \text{ m. s}^{-1}$$

Tabla 6: Datos de la velocidad límite por cada ensayo, el promedio, la incertidumbre absoluta y relativa según cada líquido.

Líquidos	Velocidad límite $Vl/m. s^{-1}$				Incertidumbre absoluta $m. s^{-1}$	Promedio $m.s^{-1}$	Incertidumbre relativa
	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4			
Aceite de cocina	1.46	1.5	1.44	1.53	0.045	1.48	0.030
Agua con jabón	36.51	36.57	36.48	36.45	0.06	36.50	0.001
Agua	45.64	45.59	46.71	45.67	0.52	45.90	0.011
Leche normal	0.67	0.74	0.65	0.54	0.07	0.66	0.107
Aceite de oliva	0.78	0.83	0.74	0.87	0.065	0.81	0.080
Glicerina	0.014	0.013	0.01	0.012	0.002	0.012	0.163
Jabón líquido	0.189	0.194	0.186	0.191	0.004	0.190	0.021

Tabla 7: Promedios de masa, densidad y velocidad límite según cada sustancia

Líquidos	$Masa_{medio} \text{ m/kg}$ $\Delta m = \pm 0.00048 \text{ kg}$	Densidad $\rho L/kg.m^{-3}$ $\Delta \rho L = \pm 6kg.m^{-3}$	$V(límite)_{medio} \text{ m.s}^{-1}$ $\Delta v = \pm 0.06m.s^{-1}$
Aceite de cocina	0.22635	905	1.48
Agua con jabón	0.23511	940	36.50
Agua	0.24978	999	45.90
Leche evaporada	0.26157	1046	0.66
Aceite de oliva	0.23147	926	0.81
Glicerina	0.31307	1252	0.01
Jabón líquido	0.28909	1156	0.19

Para hallar la incertidumbre del promedio de la masa se calculó el rango de las mediciones de la masa del jabón líquido y se dividió entre dos.

Para hallar la incertidumbre de las densidades se calculó mediante la suma de la incertidumbre relativa de la masa con la incertidumbre relativa del volumen. Para tener una incertidumbre absoluta, la incertidumbre relativa se multiplicó con la densidad del agua.

APLICACIÓN DE LA LEY DE STOKES Y SU INCERTIDUMBRE

Reemplazando los datos en la ley de Stokes se hallaron los valores de viscosidad por cada líquido.

Ley de Stokes:
$$V_l = \frac{2g(\rho_e - \rho_f)R^2}{9\mu}$$

Usando los datos a los que se obtuvieron mediante la experimentación, en este caso para el aceite de cocina:

$$\text{Velocidad límite } (v_l) = 1.48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Gravedad} = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{Densidad de la esfera } (\rho_e) = 1415 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{Densidad del liquido } (\rho_f) = 905 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{Radio de la esfera } (R) = 0.00830 \text{ m}$$

Reemplazando y despejando:

$$\mu (\text{aceite de cocina}) = 0.0517 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$$

Incertidumbre de la viscosidad

La incertidumbre relativa de la viscosidad la halle sumando las incertidumbres relativas de los siguientes valores:

- ❖ *Velocidad límite* (v_l)
- ❖ *Densidad de la esfera menos densidad del liquido* ($\rho_e - \rho_f$)
- ❖ *Radio de la esfera al cuadrado* (R^2)

A continuación, un ejemplo con el aceite de cocina.

- La incertidumbre relativa de la **velocidad de límite** (v_l) de la esfera en el aceite de cocina es:

$$\Delta r v_l (\text{aceite de cocina}) = 0.03$$

- La incertidumbre absoluta de la densidad de la esfera menos densidad del líquido ($\rho_e - \rho_f$) se calcula sumando las incertidumbres absolutas de ρ_e y ρ_f .

$$\Delta\rho_e = \pm 17 \text{ kg.m}^{-3} + \Delta\rho_f = 6 \text{ kg.m}^{-3}. \quad \Delta(\rho_e - \rho_f) = \pm 23 \text{ kg.m}^{-3}$$

Entonces, la incertidumbre relativa de $(\rho_e - \rho_f)$ estaría dada por:

$$\frac{23 \text{ kg.m}^{-3}}{(\rho_e - \rho_f)} = \frac{23}{(1415 - 905)} = 0.045$$

$$\Delta r(\rho_e - \rho_f) = 0.045$$

- La incertidumbre relativa del término **radio al cuadrado** (R^2) de la esfera es el doble que la incertidumbre relativa del radio:

$$\Delta r R = 0.003$$

$$\Delta r R^2 = 0.006$$

La suma de todas las incertidumbres queda:

$$0.03 + 0.045 + 0.006 = 0.081 \quad \Delta r \eta (\text{aceite de cocina}) = 0.081$$

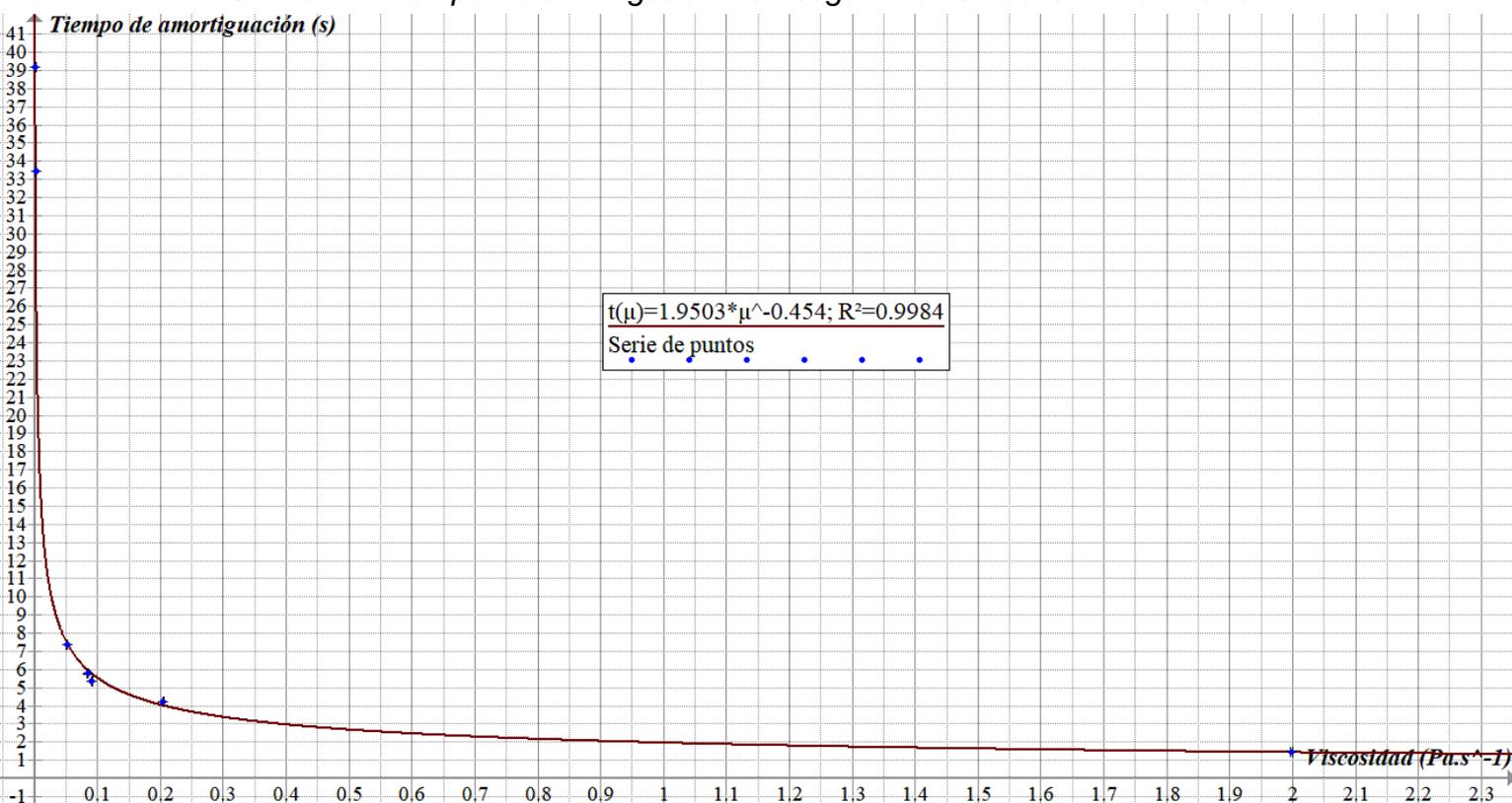
A todo el conjunto de datos de viscosidad le asigne la incertidumbre relativa del agua con jabón que es de 0.048. Que en incertidumbre absoluta es de 0.0001 Pa. s⁻¹ aproximadamente.

Tabla 8: Promedio de viscosidad y tiempo de amortiguación por cada líquido.

Líquidos	Viscosidad (medio) $\eta / \text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$ $\Delta\eta = \pm 0.0001 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$	t (medio) t/s $\Delta t = \pm 0.01 \text{ s}$
Aceite de cocina	0.0517	7.39
Agua con jabón	0.0020	33.47
Agua	0.0014	39.19
Leche normal	0.0846	5.77
Aceite de oliva	0.0912	5.34
Glicerina	1.9983	1.48
Jabón líquido	0.2047	4.23

DATOS PRESENTADOS

Grafica 1: Tiempo de amortiguación en segundos vs viscosidad en Pa. s⁻¹



En la gráfica 1: “Tiempo de amortiguación vs Viscosidad del líquido” podemos observar que en el eje x la variable independiente “viscosidad (Pa. s⁻¹)” y en el eje y la variable dependiente “Tiempo de amortiguación (s)”. En la gráfica se observan los datos dispersos con una tendencia exponencial decreciente. Al contrario de lo que se pensaba en la hipótesis, se observa una proporcionalidad exponencial negativa entre las dos variables, es decir, el tiempo de amortiguación disminuye exponencialmente a medida que la viscosidad se incrementa. En adición, esta proporcionalidad se hace evidente en la correlación, que es $r = -0.9969$, que es fuerte y negativa, a valores altos de una variable le corresponden valores bajos de la otra variable.

Dado que:

$$t(\mu) = 1.953 * \mu^{-0.454}$$

$$t(\mu) \cong 1.953 * \mu^{-0.5}$$

Entonces si reemplazamos en la variable independiente μ por $\mu^{-0.5}$ tendremos una gráfica lineal y podemos hallar una relación más clara entre t y μ .

Grafica 2: Tiempo de amortiguación en segundos vs viscosidad^{-1/2}. Ajuste lineal de la gráfica 1.



En la gráfica 2: “Tiempo de amortiguación vs Viscosidad^{-1/2}” podemos observar en el eje x la variable independiente “Viscosidad^{-1/2}” y en el eje y la variable dependiente “Tiempo de amortiguación (s)”. En la gráfica se observan 7 datos dispersos con una tendencia lineal creciente que no parte del origen. Esta grafica es la linealización de la gráfica 1 y representa que el tiempo de amortiguación aumenta a medida que la viscosidad elevada a la -1/2 decrece. En adición, esta proporcionalidad se hace evidente en la correlación, que es $r = -0.9914$, que es fuerte y positiva, a valores altos de una variable le tocan valores altos de la otra.

También tenemos que:

$$t(\mu^{-0.5}) = 1.449 * \mu^{-0.5} + 0.7702$$

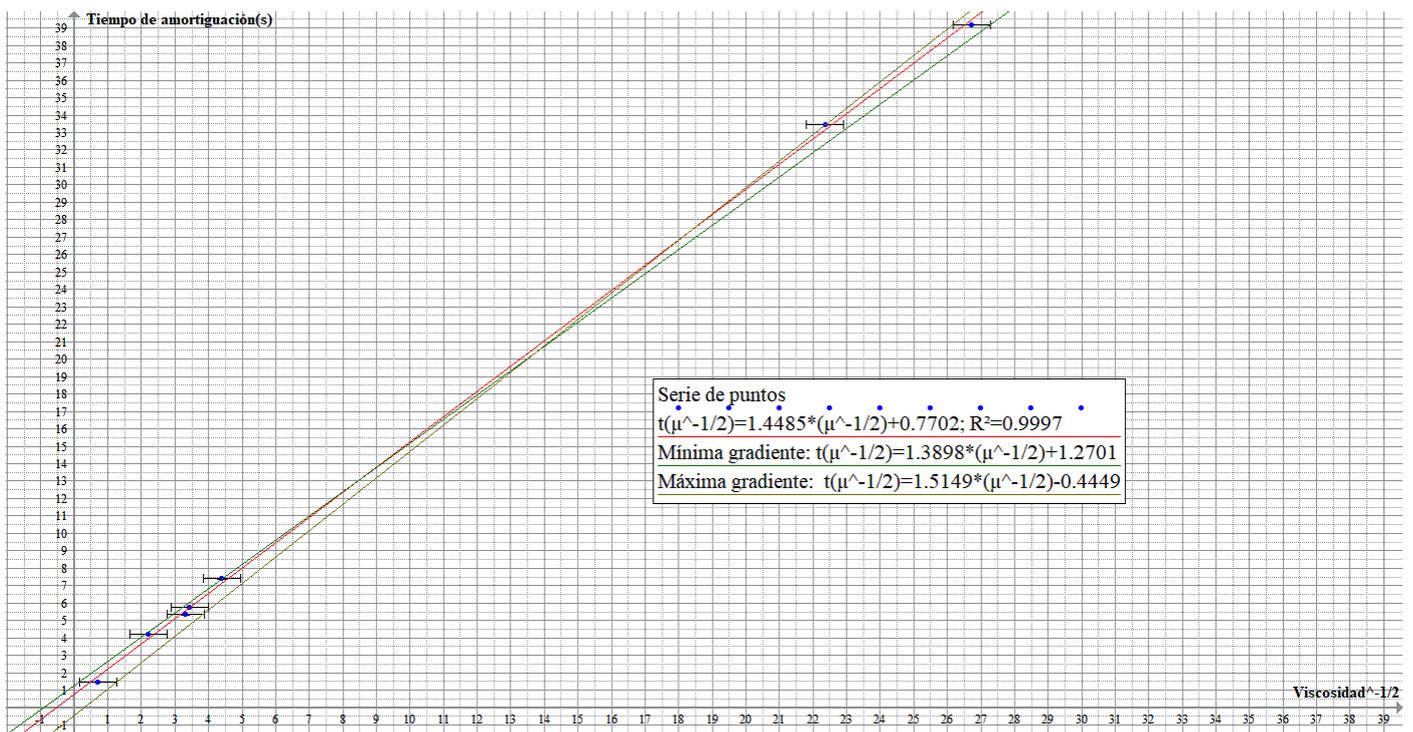
$$t(\mu^{-0.5}) \cong 1.449 * \mu^{-0.5}$$

$$t^2 \cong 2.1 * \mu^{-1}$$

$$t^2 * \mu \cong 2.1 Pa * s$$

Entonces, determinamos que el tiempo de amortiguación al cuadrado con la viscosidad son inversamente proporcionales.

Grafica 3: Tiempo de amortiguación en segundos vs viscosidad^{1/2}. Gradientes máximos y mínimos incluidos.



CONCLUSIONES

Después de haber realizado los experimentos, el procesamiento de los datos y su análisis, ha quedado demostrado que para las condiciones que caracterizan a mi experimento, si existe una relación entre la viscosidad y el tiempo de amortiguación. Así mismo, la hipótesis planteada al inicio resulto ser invalida en parte ya que, si existió una relación negativa entre ambas variables, pero esta no era inversamente proporcional ni lineal sino sucede que el tiempo de amortiguación aumenta a medida que la viscosidad elevada a la $-1/2$ decrece. Este comportamiento está sustentado por el marco teórico porque, según este, el movimiento armónico amortiguado depende en parte importante de la viscosidad del fluido con el que interactúa. Ello también está apoyado por la alta correlación de Pearson ($r = -0.9969$), además del error porcentual que es bastante reducido (4.8%). La ecuación resultante que resume la relación de ambas variables estudiadas es: $t(\mu) = 1.9503 * \mu^{-0.454}$.

La mayor limitación durante el proceso de elaboración fue no fue posible hacer uso del sensor de movimiento que se encontraba en el laboratorio. Este dispositivo habría sido de gran ayuda para medir medidas más exactas y en mayor cantidad. Lo que impedía el uso de este dispositivo fue que el sensor de ultrasonido se veía obstaculizado por el líquido para ver la esfera dentro del mismo en ambos experimentos, tanto para hallar viscosidad como en el caso del tiempo de amortiguación. También hubo procedimientos tediosos y minuciosos que hicieron que el tiempo empleado no baste para tomar más medidas que permitan alcanzar una relación más precisa.

Para la situación del posible reemplazo de líquido de amortiguador en un carro planteada en la introducción, se concluye que para que el movimiento amortiguado se parezca lo mejor posible es necesario un líquido viscoso que amortiguara en menor tiempo el movimiento oscilatorio. En este experimento elegí a la glicerina por ser la que amortigua mejor la oscilación.

Sugerencias:

Para la posible replicación del experimento recomiendo usar instrumentos que se adapten perfectamente a las necesidades del experimento. Ampliar la cantidad de líquidos a usar, además de que sean siempre newtonianos. Se recomienda que empleen métodos sencillos, organizados y eficientes para obtener todos los datos que se necesita para hallar la variable viscosidad. Por último, recomiendo hacer uso de dispositivos y tecnología más avanzados para hallar datos de una forma directa y eficiente.

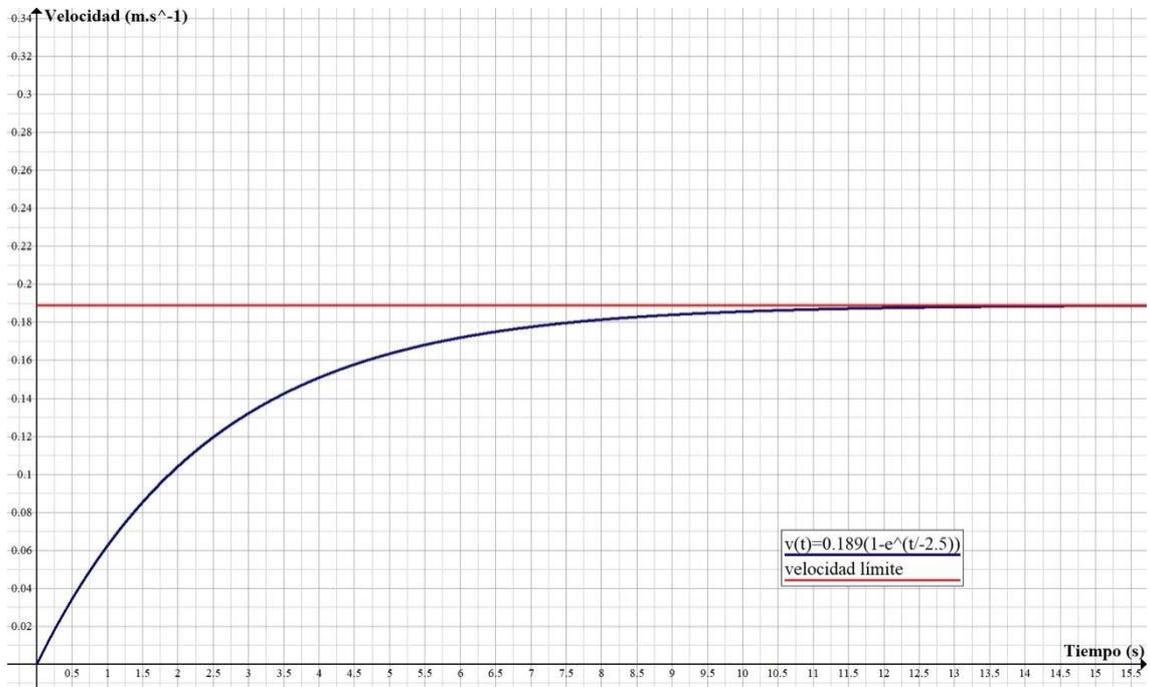
REFERENCIAS

- Sandoval, C., Caramy, J., & Salinas, J. (2010, 18 febrero). La engañosa simplicidad del "método de Stokes" para medir viscosidades. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext
- Tippens, P. (2007). Movimiento armónico simple [PPT]. Recuperado de https://es.slideshare.net/moises_galarza/movimiento-armonico-simple-14558032
- Ulloa, M. (2013, 29 agosto). Movimiento armónico amortiguado primera parte [Archivo de vídeo]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=wEjSoqSLpjo>
- Departamento de física aplicada III. Universidad de Sevilla. (s.f.). Oscilaciones amortiguadas (GIE). Recuperado de [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_(GIE))
- García, A. (s.f.). Fuerzas no conservativas. Recuperado de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/dinamica/trabajo/energia/energia3.html
- Medina, H. (2009, agosto). Física 2. Recuperado de http://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/7140/Medina_Fisica2_Cap2.pdf?sequence=3&isAllowed=y
- Barco, H., & Rojas, E. (1996, febrero). Física general para estudiantes de ingeniería. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/9314/6/958-9322-24-7.pdf>
- Oliva Domínguez, R. D. (2011). "Simulación en modélica de elementos mecánicos de una suspensión" (Proyecto Fin de Carrera). Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España.

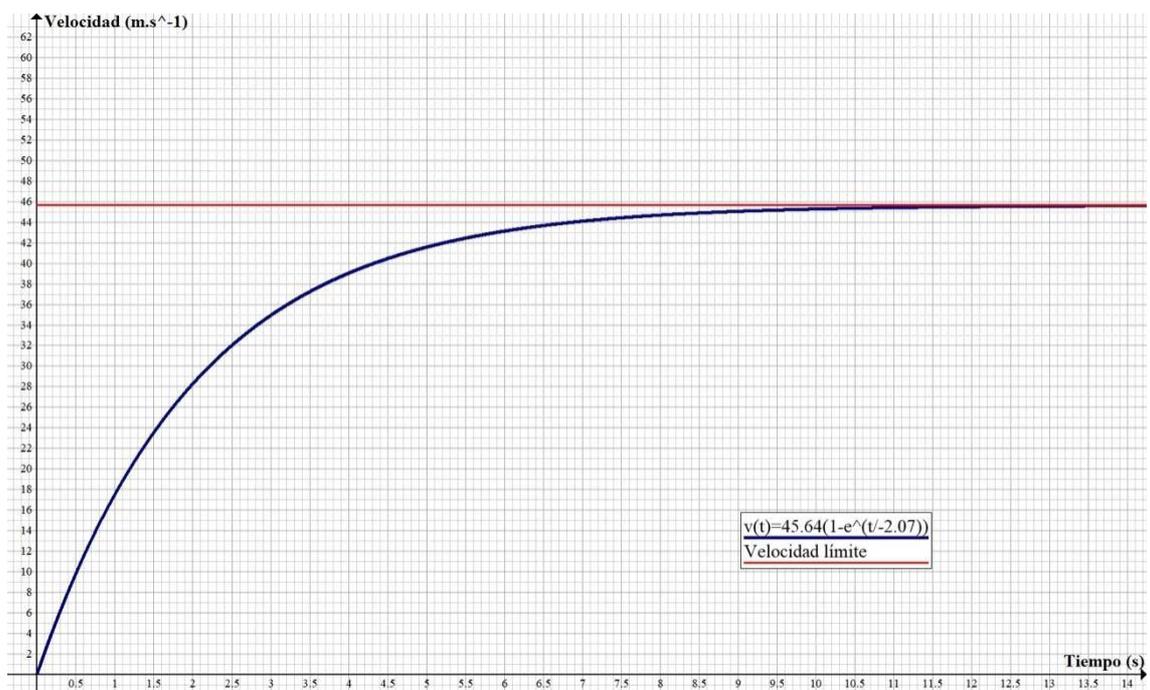
ANEXOS

Graficas de velocidad límite de cada uno de los líquidos

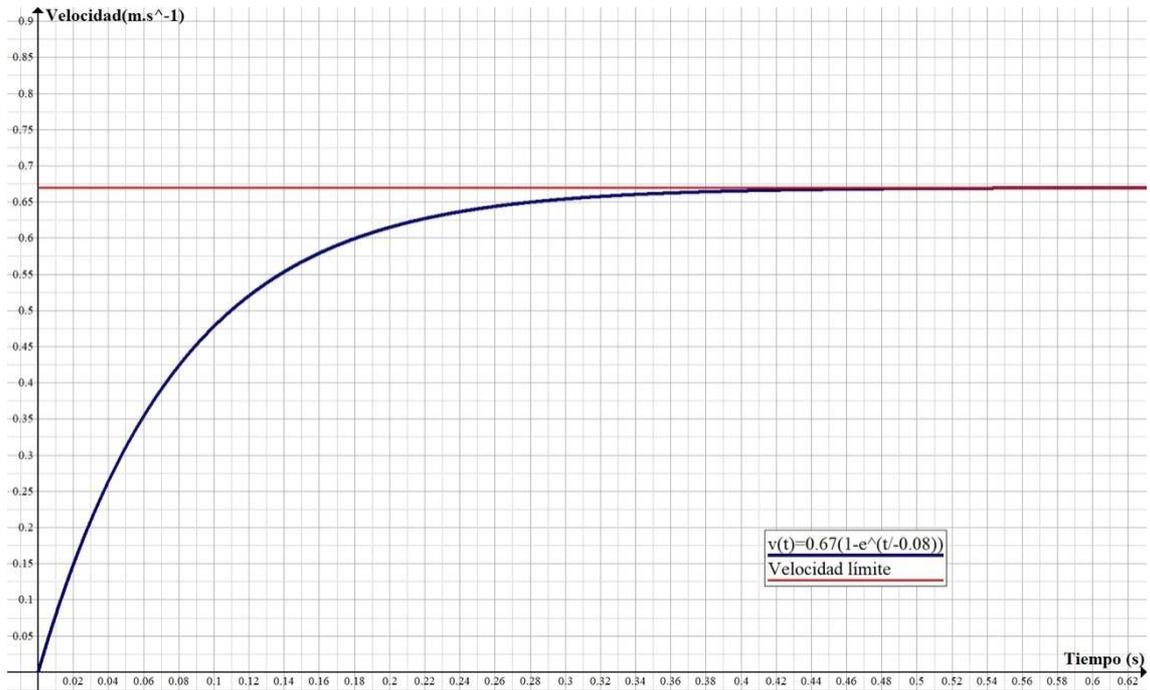
- Velocidad límite de la bola en el jabón líquido



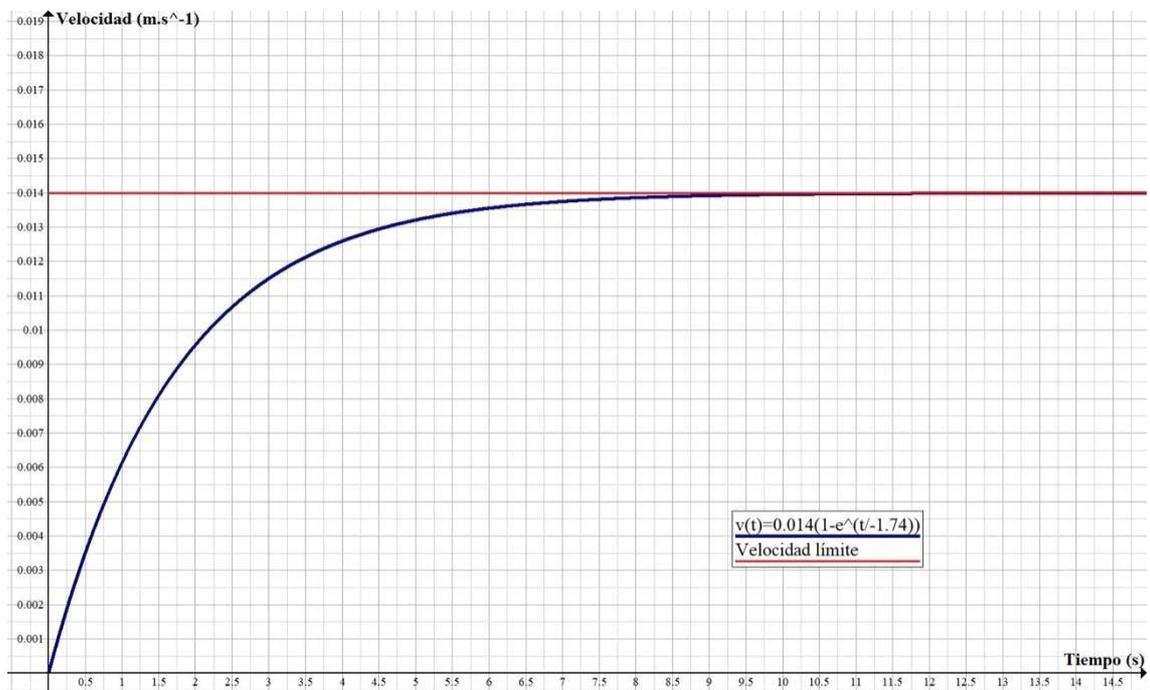
- Velocidad límite de la bola en el agua



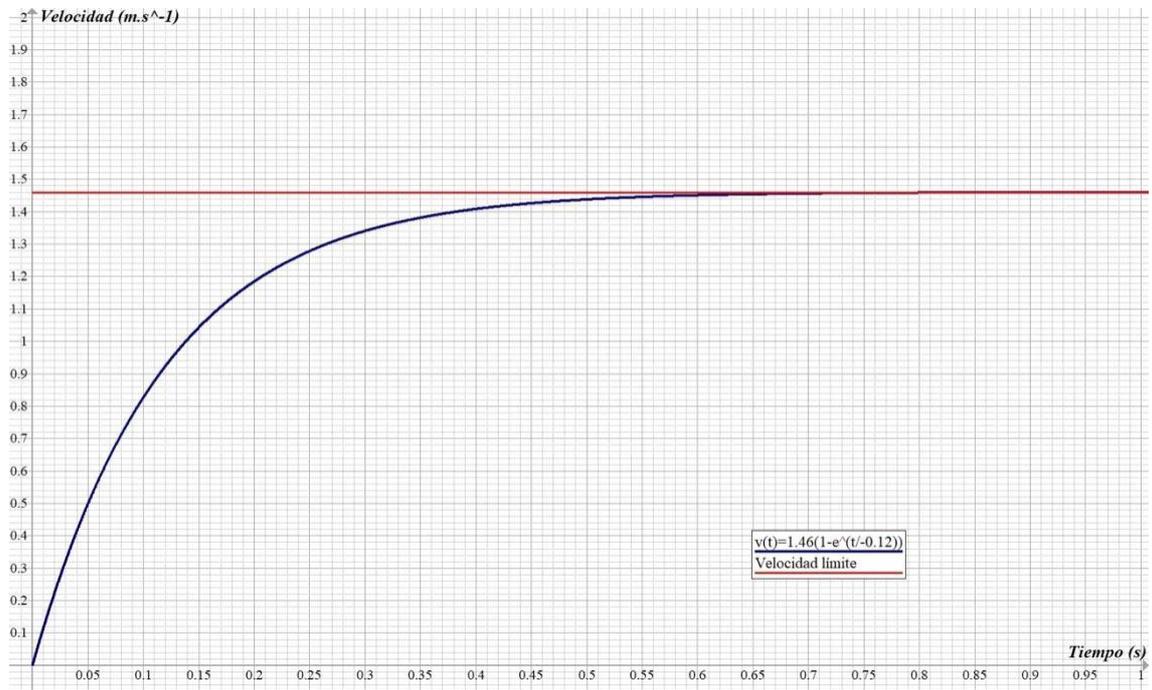
- Velocidad límite de la bola en la leche evaporada



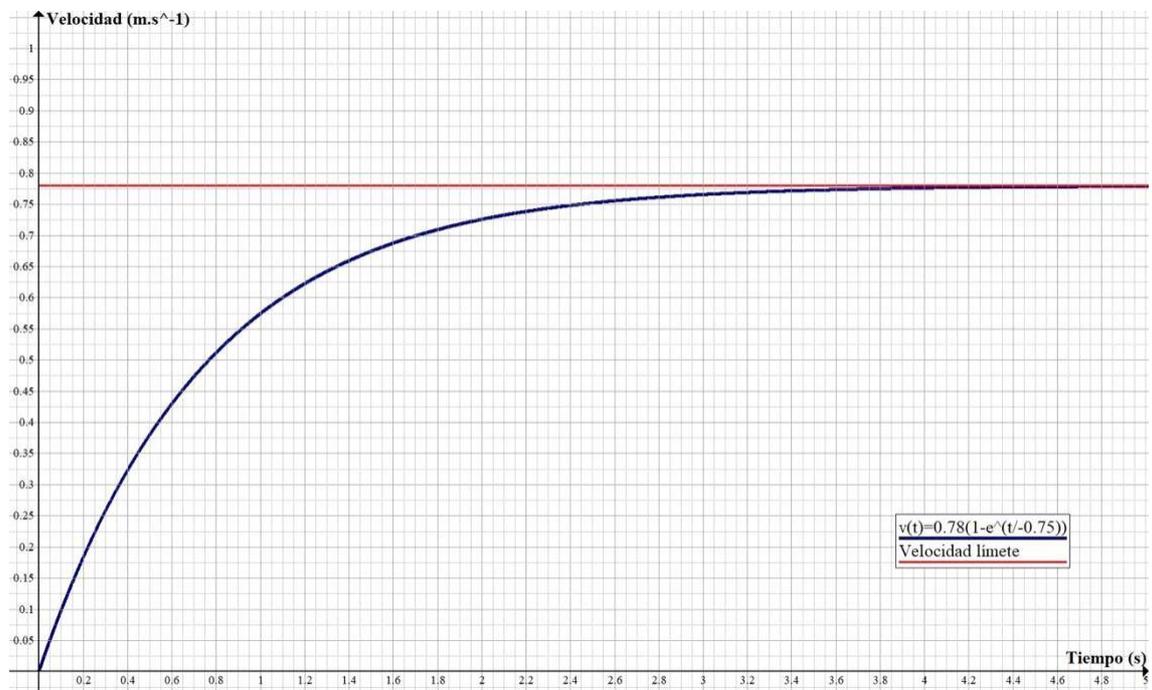
- Velocidad límite de la bola en la glicerina



- Velocidad límite de la bola en el aceite de cocina



- Velocidad límite de la bola en el aceite de oliva



- Velocidad límite de la bola en el agua con jabón

